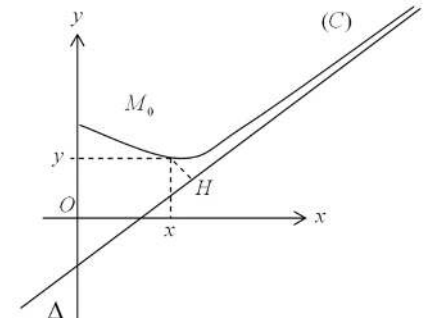
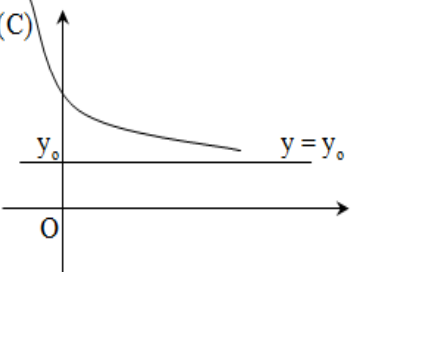
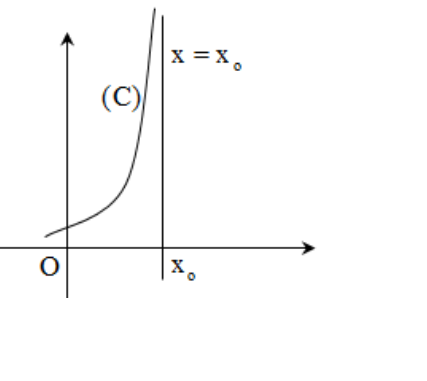


BÀI TOÁN 4: XÁC ĐỊNH SỐ ĐƯỜNG TIỆM CẬN DỰA VÀO ĐỒ THỊ

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa đường tiệm cận của đồ thị hàm số. ➤ Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Điểm $M \in (C)$, MH là khoảng cách từ M đến đường thẳng d. $(d) \text{ tiệm cận của } (C) \Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} MH = 0$	
2. Đường tiệm cận ngang Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ hoặc $(-\infty; +\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$	
3. Đường tiệm cận đứng Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$	

Lưu ý: Với ĐT phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ luôn có TCN là $y = \frac{a}{c}$ và TCD $x = -\frac{d}{c}$.

3. Dấu hiệu

- +) Hàm phân thức mà nghiệm của mẫu **không** là nghiệm của tử có tiệm cận đứng.
- +) Hàm phân thức mà bậc của tử $\leq$ bậc của mẫu có TCN.
- +) Hàm căn thức dạng: $y = \sqrt{x} - \sqrt{b}$, $y = \sqrt{x} - bt$, $y = bt - \sqrt{x}$ có TCN. (Dùng liên hợp)

4. Cách tìm

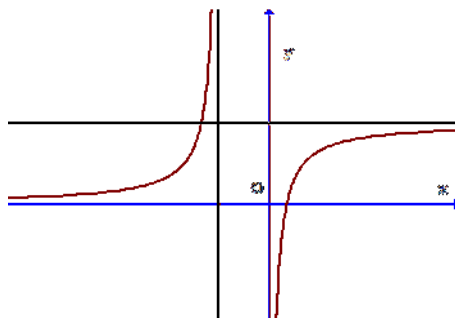
- +) TCD: Tìm nghiệm của mẫu **không** là nghiệm của tử.
- +) TCN: Tính 2 giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$

5. Chú ý

- +) Nếu $x \rightarrow +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$
- +) Nếu $x \rightarrow -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = -x$

B. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. [NB] Cho đồ thị một hàm số có hình vẽ như hình dưới đây.



Hỏi đồ thị trên có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. Không có tiệm cận. C. 2.

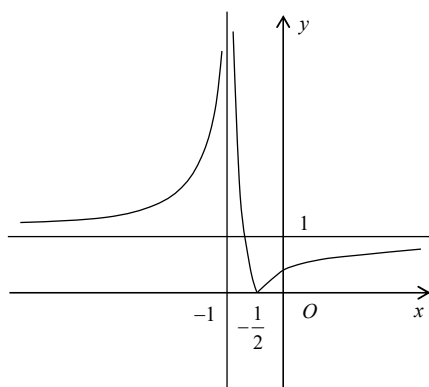
D. 3

Lời giải:

Chọn A

Nhìn đồ thị ta thấy nhánh bên phải có một tiệm cận đứng, một tiệm cận ngang và nhánh bên trái cũng vậy. Tổng cộng có 4 tiệm cận.

Câu 2. [NB] Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **sai**?



A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

C. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có :

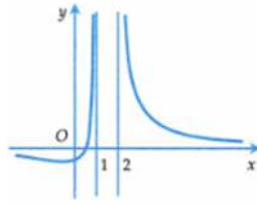
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Câu 3. [NB] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus [1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho bằng:

A. 2.

B. 3.

C. 1.

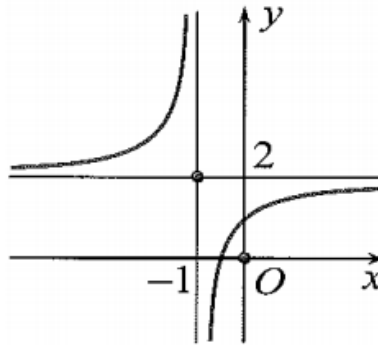
D. 4.

Lời giải:

Chọn B.

Từ đồ thị hàm số, ta thấy đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận ngang và 2 đường tiệm cận đứng. Do đó, đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 4. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Cho các khẳng định sau:

(I). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$,

(II). $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(III). $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$,

(IV). $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 1 .

B. .

C. 3 .

D. 4 .

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta có:

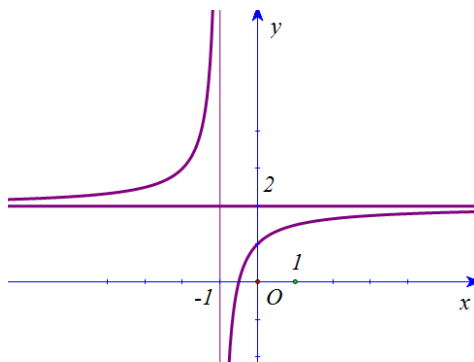
+) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow (I)$ Đúng.

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow (II)$ Sai.

+) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow (III)$ Sai.

+) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow (IV)$ Đúng.

Câu 5. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Xét các mệnh đề sau:

$$(I). \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$(II). \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$(III). \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$$

$$(IV). \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

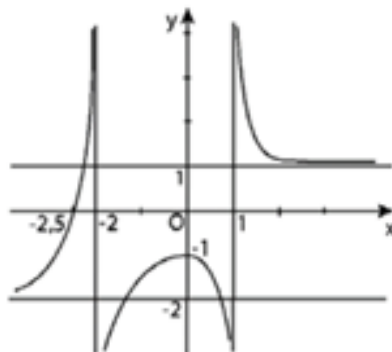
Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty.$$

Vậy có 2 mệnh đề đúng.

Câu 6. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên



Các khẳng định sau:

$$(I) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty; (II) \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty; (III) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; (IV) \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

Số khẳng định đúng là

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

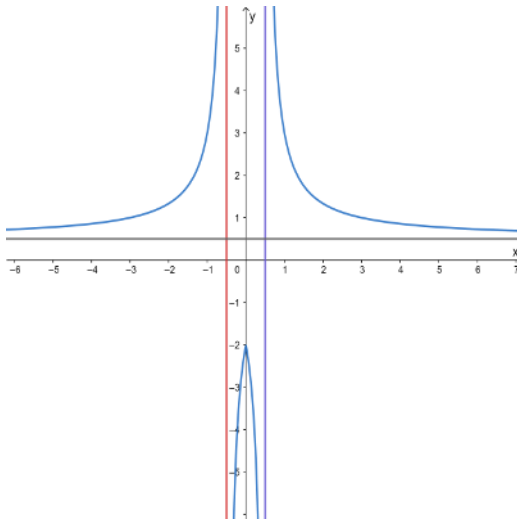
Lời giải

Chọn B

$$(I) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ đúng; } (II) \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \text{ đúng}$$

$$(III) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ sai; } (IV) \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \text{ đúng}$$

Câu 7. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi a là số đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Giá trị của biểu thức $a^2 + a$ bằng
A. 6. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là } y = \frac{1}{2}.$$

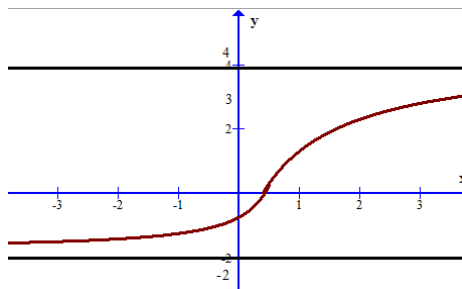
$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty \text{ Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là } x = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty \text{ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là } x = -\frac{1}{2}$$

Đồ thị hàm số có 3 tiệm cận $\Rightarrow a = 3$.

$$\text{Vậy } a^2 + a = 12$$

Câu 8. **[VD]** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Hỏi có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \left| f(x) + \sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4 \right|$ có đúng một tiệm cận ngang?



A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn C

Để đồ thị hàm số $y = \left| f(x) + \sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4 \right|$ có đúng một tiệm cận ngang thì đồ thị hàm số $y = f(x) + \sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4$ có hai tiệm cận ngang đối xứng nhau,

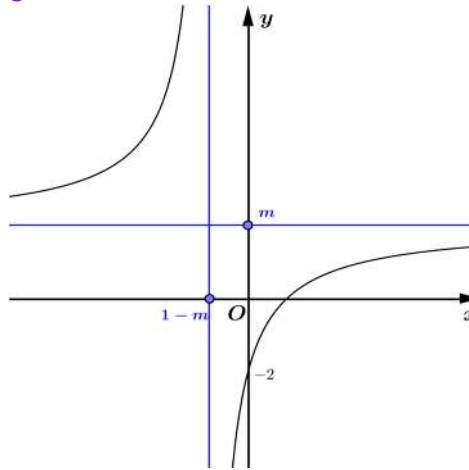
khi đó từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta tiệm tiến xuống đúng 1 đơn vị.

Vậy $\sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} - 4 = -1$.

Giải $\sqrt[3]{8-m} + \sqrt{m+1} = 3$ ta đặt $u = \sqrt[3]{8-m}$; $v = \sqrt{m+1}$ tìm được ba giá trị m là 0; 8; 35.

Câu 9. [VD] Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên.

Giá trị của $P = a + b + c$ bằng



A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. -1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq -c \\ ac - b \neq 0 \end{cases}$

Hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng: $x = -c$; tiệm cận ngang: $y = a$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta nhận xét được:

- $\begin{cases} m > 0 \\ 1-m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$

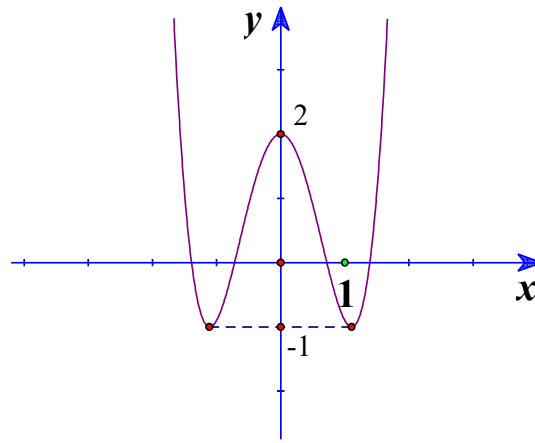
- Khi $x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \frac{b}{c} = -2 \Rightarrow b = -2c$

- Tiệm cận đứng: $x = 1-m$; tiệm cận ngang: $y = m$

Suy ra: $\begin{cases} -c = 1-m \\ a = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = m-1 \\ a = m \end{cases} \Rightarrow b = -2c = -2m+2$ (thỏa điều kiện)

Nên: $P = a + b + c = m - 2m + 2 + m - 1 = 1$

Câu 10. [VDC] Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2020x}{f(x)[f(x)-m]}$ có tổng số 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng là

A. 2. **B. 1.** C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ với bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$, do đó đồ thị hàm số $g(x)$ luôn có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

$$\text{Phương trình } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1; -2 < x_1 < -1 \\ x = x_2 \in (-1; 0) \\ x = x_3 \in (0; 1) \\ x = x_4 \in (1; 2) \end{cases}.$$

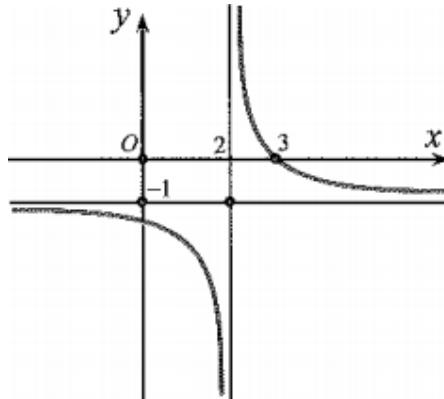
Ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt đều khác 0 nên $x = x_1, x = x_2, x = x_3, x = x_4$ là 4 tiệm cận đứng đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy để đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng 9 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng thì phương trình $f(x) = m$ phải có đúng 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác với 4 nghiệm $x_i (i = \overline{1, 4})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ m \neq 0 \end{cases} \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m = 1.$$

C. BÀI TẬP TRÊN LỚP:

Câu 1. [NB] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



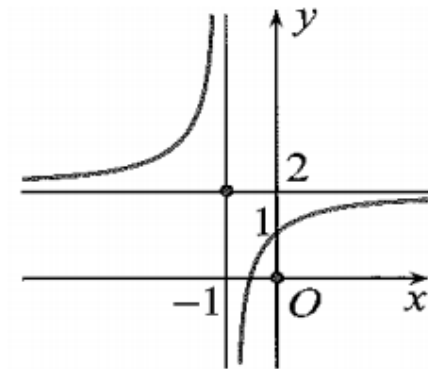
Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- C. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $A(3; 0)$.
- D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$.

Lời giải

Chọn B

Câu 2. [NB] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây **đúng**?

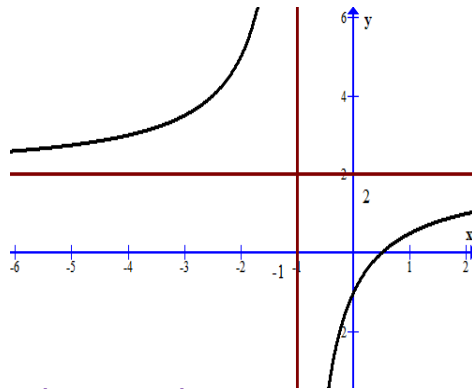
- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 2$.
- B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- C. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(1; 0)$.
- D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

Câu 3. [NB] Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới. Chọn khẳng định sai.



Khi đó hai tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho tạo với hai trục tọa độ một đa giác có diện tích bằng?

A. 2 (đvdt).

B. 3 (đvdt).

C. 6 (đvdt).

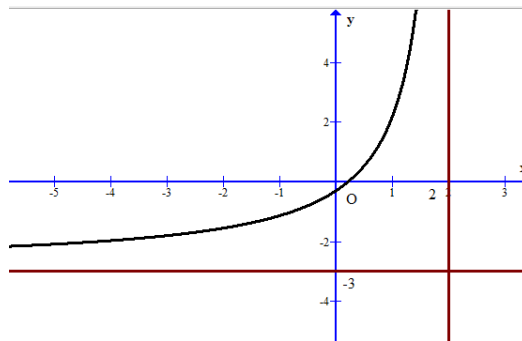
D. 1 (đvdt)

Lời giải:

Chọn A

Vì tạo hình chữ nhật có chiều dài bằng 2; chiều rộng bằng 1.

Câu 4. [NB] Biết hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; 2)$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Tính tổng khoảng cách từ O đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.



A. 5.

B. 1.

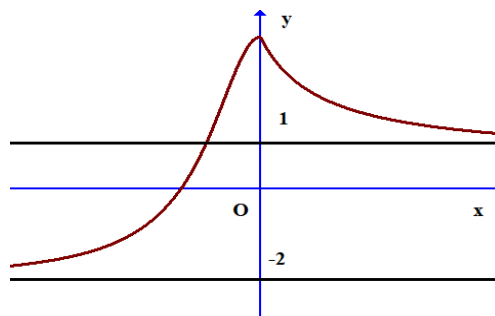
C. -1.

D. 4

Lời giải:

Chọn A

Câu 5. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có tiệm cận ngang là?

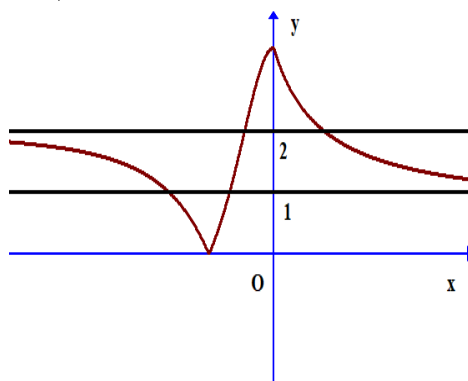
A. $y = 1$ và $y = -2$.

B. $y = -1$ và $y = -2$.

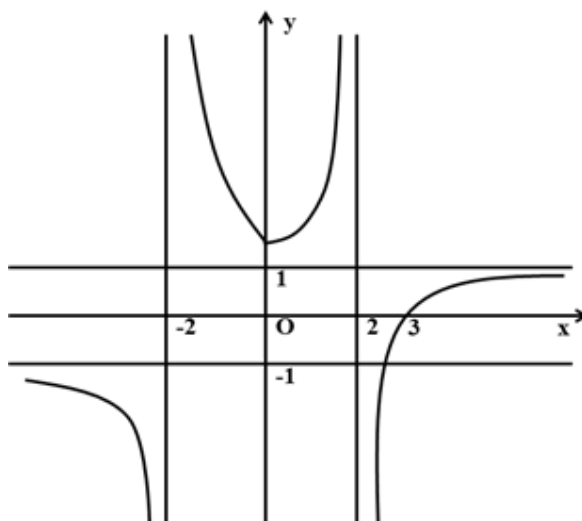
C. $y = 1$ và $y = 2$.

D. $y = 2$.

Lời giải:

Chọn CTa có đồ thị hàm $y = |f(x)|$ có dạng là:Suy ra đồ thị có hai tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = 2$.

Câu 6. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

**A. 4.****B. 2.****C. 1.****D. 3.**

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

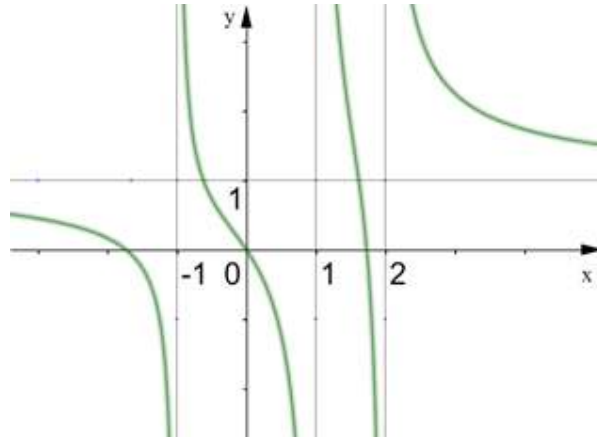
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ nên đường thẳng $y = -1$ là một đường tiệm cận ngang. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang.Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = \pm 1$.

Tương tự

 $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là đường tiệm cận đứng. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng.Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = \pm 2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

Câu 7. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$. Có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị của hàm số ta có

$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là đường tiệm cận đứng.

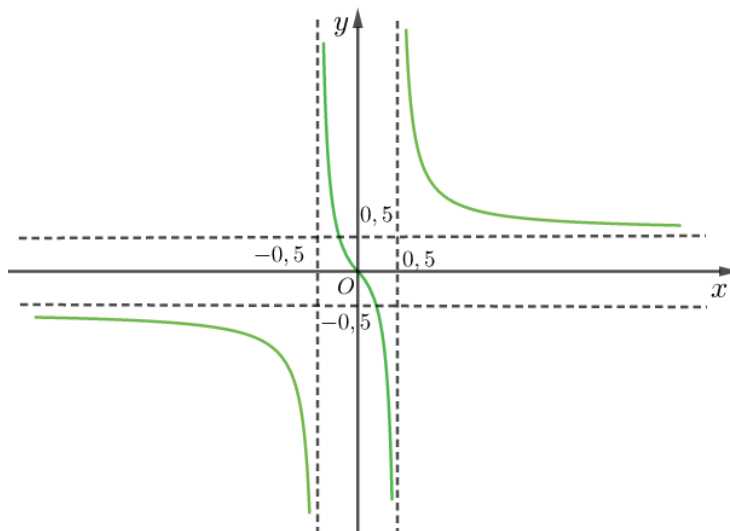
Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận đứng là $x = \pm 1$ và $x = 2$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y = 1$.

Câu 8. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 4.**B. 3.****C. 2.****D. 6.****Lời giải****Chọn A**

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang là $y = \pm \frac{1}{2}$.

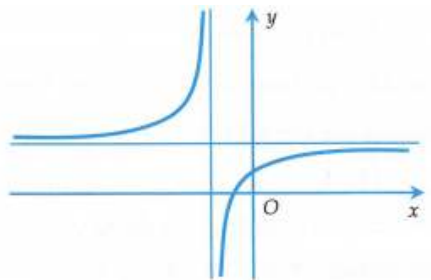
$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận đứng là $x = \pm \frac{1}{2}$

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả 4 đường tiệm cận.

Câu 9. [TH] Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó $d < 0$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

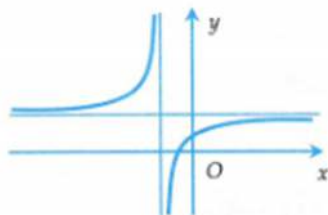
A. $a < 0, b > 0, c < 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c < 0$. **C.** $a < 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải

Chọn B.

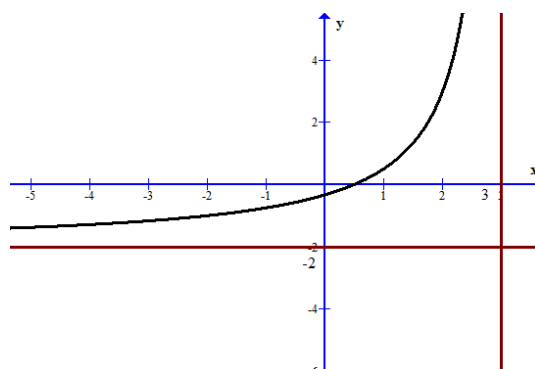
Từ đồ thị hàm số, ta có: giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung nằm phía trên trục hoành nên $\frac{b}{d} > 0$.

Tiệm cận đứng của đồ thị nằm bên phải trục tung nên $-\frac{d}{c} < 0$. Do $d < 0$ nên $b < 0, c < 0$.



Câu 10. [TH] Biết hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Số tiệm cận của đồ thị hàm số

$y = |f(x)|$ là?



A. 2.

B. 3.

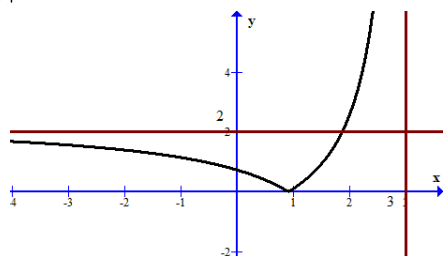
C. 1.

D. 4

Lời giải

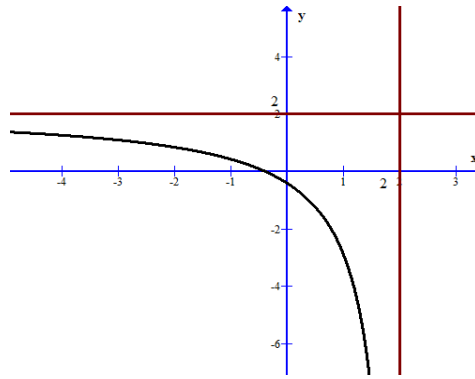
Chọn A

Vì đồ thị hàm $y = |f(x)|$ là



Câu 11. [TH] Biết hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Số tiệm cận của đồ thị hàm số

$y = |f(x)|$ là?

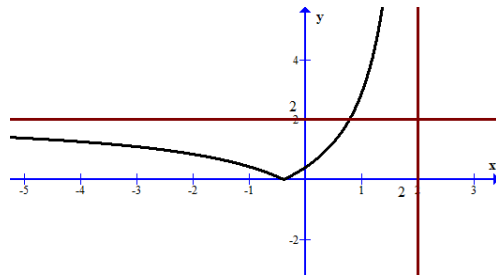


A. 2.

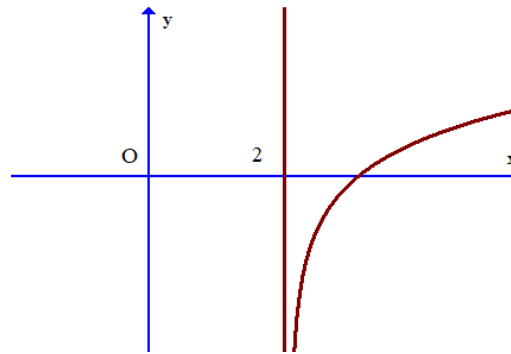
B. 3.

C. 1.

D. 4

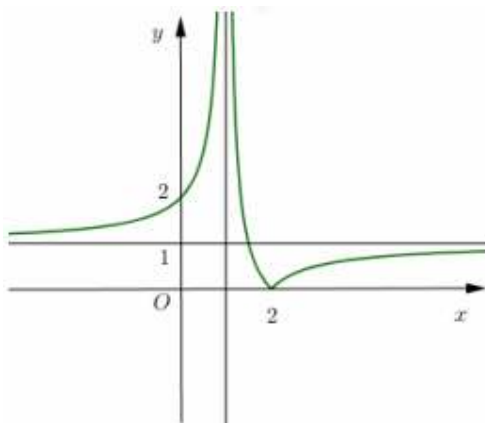
Lời giải**Chọn B**Vì đồ thị hàm $y = |f(x)|$ là

Câu 12. [TH] Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Chọn phát biểu **đúng**.

A. Đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ có tiệm cận đứng $x = 3$.B. Đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ có tiệm cận đứng $x = 2$.C. Đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ có tiệm cận đứng $x = 1$.D. Đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ không có tiệm cận đứng.**Lời giải:****Chọn A**

Vì $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x-1) = \lim_{\substack{t \rightarrow 2^+ \\ t = x-1}} f(t) = -\infty$.

Câu 13. [TH] Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Tổng số tiệm cận của đồ thị hàm số là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4

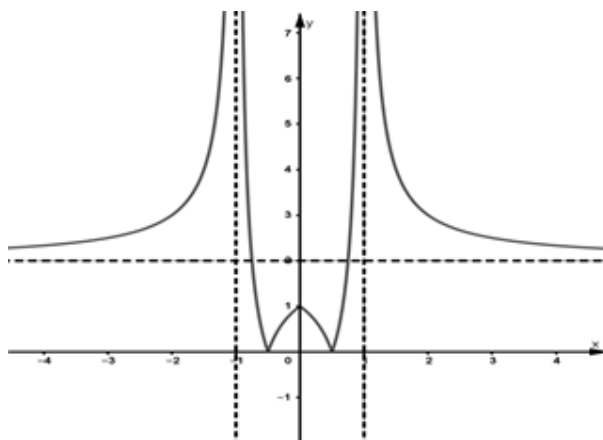
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng $x = 1$. Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 14. [TH] Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hình vẽ dưới đây.



Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

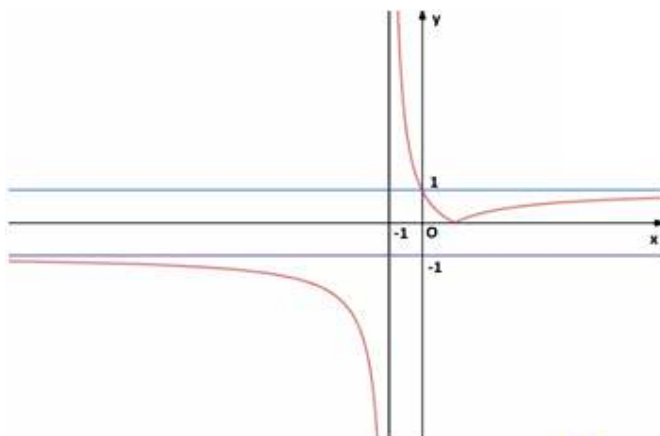
Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 2$

Lại thấy: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x = -1; x = 1$

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận

Câu 15. [VD] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm m để đồ thị hàm số $y = f(x-m)$ có tiệm cận đứng là trục Oy ?



A. 0.

B. -1.

C. 2.

D. 1.**Lời giải****Chọn D**

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.

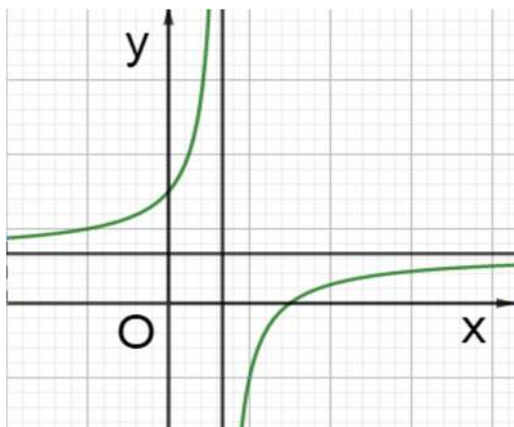
Tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (m; 0)$ thì:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ biến thành đồ thị hàm số $y = f(x-m)$.

Tiệm cận $x = -1$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biến thành tiệm cận $x = -1 + m$ của đồ thị hàm số $y = f(x-m)$.

Đồ thị hàm số $y = f(x-m)$ có tiệm cận đứng là trục $Oy \Leftrightarrow -1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Câu 16. [VD] Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x-3}{x-m}$ có đồ thị như hình dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tâm đối xứng của đồ thị hàm số nằm trong đường tròn tâm gốc tọa độ O bán kính bằng $\sqrt{2019}$?

A. 40.

B. 0.

C. 1.

D. 38.

Lời giải**Chọn C**

Từ dạng đồ thị của hàm số ta suy ra

$$y' = \frac{-m(2m-1)+3}{(x-m)^2} > 0 \Rightarrow -m(2m-1)+3 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{3}{2}.$$

Khi đó dễ thấy đồ thị có hai đường tiệm cận là $x = m$, $y = 2m-1$.

Vậy tâm đối xứng là điểm $I(m; 2m-1)$.

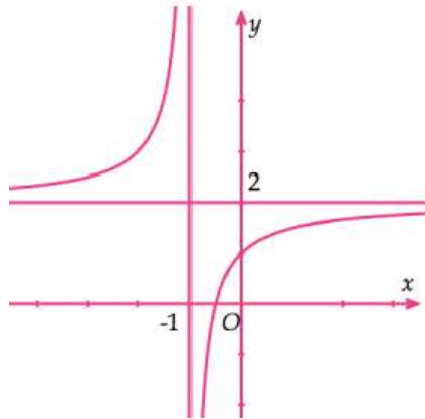
Từ đồ thị và giả thiết kèm theo ta có :

$$\begin{cases} y = 2m-1 > 0 \\ x = m > 0 \\ OI < \sqrt{2019} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m > 0 \\ -19 \leq m \leq 20 \ (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện trên ta suy ra $m = 1$.

Câu 17. [VD] Cho hàm số $y = f(x) = \frac{nx+1}{x+m}$; ($mn \neq 1$) xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên từng

khoảng xác định và có đồ thị như hình vẽ bên:



Tính tổng $m+n$?

A. $m+n=1$.

B. $m+n=-1$.

C. $m+n=3$.

D. $m+n=-3$.

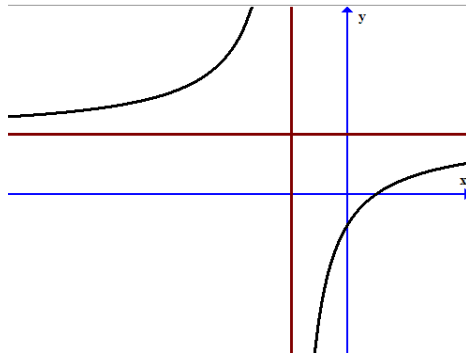
Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{nx+1}{x+m}$; ($mn \neq 1$) có hai đường tiệm cận $x = -m = -1$;

$$y = n = 2 \Rightarrow m = 1; \quad n = 2 \Rightarrow m+n = 3$$

Câu 18. [VD] Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$) như hình dưới. Chọn khẳng định đúng:



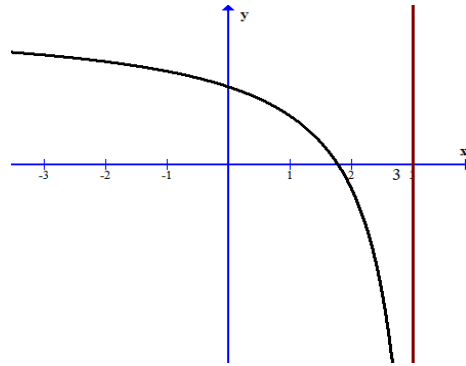
- A. $ac > 0, cd < 0$. B. $ac < 0, cd > 0$. C. $ac < 0, cd < 0$. D. $ac > 0, cd > 0$

Chọn D

Vì tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} < 0 \Leftrightarrow cd > 0$; tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} > 0 \Leftrightarrow ac > 0$.

Câu 19. [VDC] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(-\infty; 3)$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.

Hỏi trong khoảng $(-2018\pi; 0)$ đồ thị hàm số $y = f(-\sin^2 x - 2\cos(x + 2017\pi) + 1)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng.



- A. 1. B. 1008. C. 1009. D. Không có

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = -\sin^2 x - 2\cos(x + 2017\pi) + 1 = \cos^2 x + 2\cos x$,

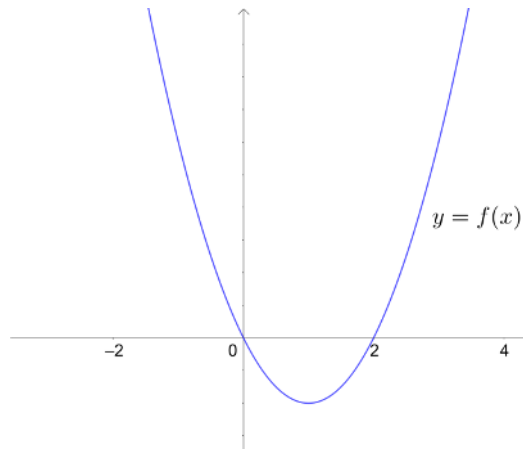
theo đồ thị ta có $\lim_{t \rightarrow 3^-} f(t) = -\infty$, để $t \rightarrow 3^- \Leftrightarrow \cos^2 x + 2\cos x \rightarrow 3^- \Leftrightarrow \cos^2 x + 2\cos x - 3 \rightarrow 0^-$.

Nên số tiệm cận bằng số nghiệm của phương trình $\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$ trên $(-2018\pi; 0)$.

Giải ra và lập luận được 1008 nghiệm, nên chọn **B**.

Câu 20. [VDC] Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị

hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{f(x+m)}$ có số tiệm cận là số lẻ.



A. $m \neq 2$ và $m \neq 0$.

C. $m \neq 0$.

B. $m \neq -2$ và $m \neq 0$.

D. $m \neq \pm 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:
$$\frac{f(x)}{f(x+m)} = \frac{x^2 - 2x}{(x+m)^2 - 2(x+m)}$$

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

$$(x+m)^2 - 2(x+m) = 0 \Leftrightarrow x = -m \vee x = 2-m.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{f(x+m)} = 1, \forall m \in \mathbb{R}^*$ nên hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{f(x+m)}$ luôn có 1 tiệm cận ngang là $y = 1$.

Với $m = 0$, ta có $\frac{f(x)}{f(x+m)} = 1, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$. Suy ra đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{f(x+m)}$ không có tiệm cận đứng.

Do vậy với $m = 0$, đồ thị hàm số $g(x) = \frac{f(x)}{f(x+m)}$ có 1 tiệm cận.

Với $m = 2$, ta có $\frac{f(x)}{f(x+m)} = \frac{x^2 - 2x}{(x+2)^2 - 2(x+2)} = \frac{x(x-2)}{x(x+2)}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$.

Có $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{f(x+m)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x-2)}{x(x+2)} = \infty,$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(x+m)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x+2} = -1.$$

Do đó đồ thị hàm số $\frac{f(x)}{f(x+m)}$ có 2 tiệm cận (1 tiệm cận đứng, 1 tiệm cận ngang).

Với $m = -2$, ta có $\frac{f(x)}{f(x+m)} = \frac{x^2 - 2x}{(x-2)^2 - 2(x-2)} = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-4)},$ có tập xác định

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2; 4\}.$$

Có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{f(x+m)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-4} = -1,$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{f(x+m)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \infty.$$

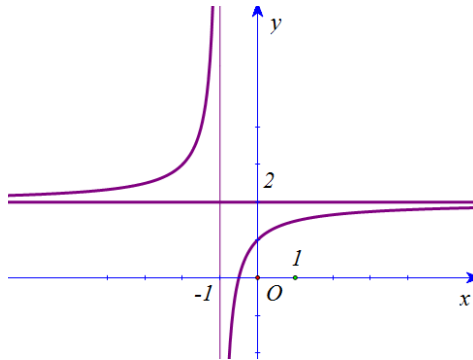
Do đó đồ thị hàm số $\frac{f(x)}{f(x+m)}$ có 2 tiệm cận (1 tiệm cận đứng, 1 tiệm cận ngang).

Với $m \neq 0$ và $m \neq \pm 2$, ta có $-m$ và $2-m$ không là nghiệm của $x^2 - 2x$. Suy ra đồ thị hàm số $\frac{f(x)}{f(x+m)}$ có 2 tiệm cận đứng là $x = -m$ và $x = 2-m$. Do vậy đồ thị hàm số $\frac{f(x)}{f(x+m)}$ có 3 tiệm cận.

Vậy với $m \neq \pm 2$, đồ thị hàm số $\frac{f(x)}{f(x+m)}$ có số tiệm cận là số lẻ.

D. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Câu 1. [NB] Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?



- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$
- B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- C. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(1; 0)$.
- D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có :

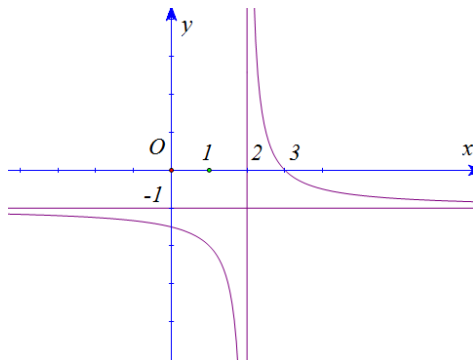
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0; 1)$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 2$.

Câu 2. [NB] Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ có hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **sai**?



- A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$
- C. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $A(3; 0)$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có :

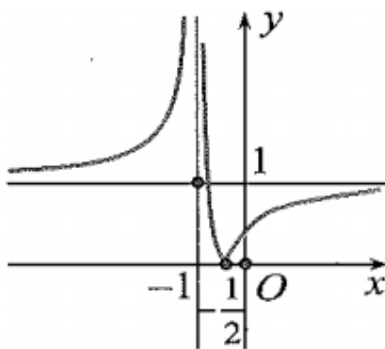
Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $A(3; 0)$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = -1$.

Câu 3. [NB] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

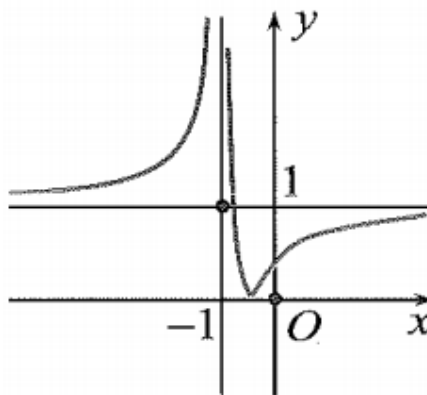
C. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.

Lời giải

Chọn B

Câu 4. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Xét các mệnh đề sau:

(I). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$,

(II). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

(III). $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$,

(IV). $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1 .

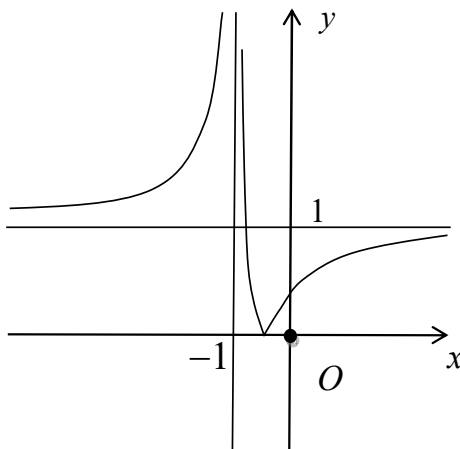
B. 2 .

C. 3 .

D. 4 .

Lời giải

Câu 5. [TH] Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có hình vẽ bên.



Xét các mệnh đề sau:

(I). $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

(II). $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

(III). $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$

(IV). $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 1.

B. 2 .

C. 3 .

D. 4 .

Lời giải

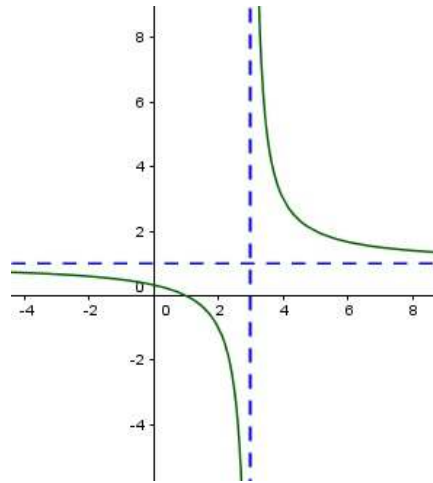
Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty.$$

Vậy có 1 mệnh đề đúng.

Câu 6. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, có đồ thị như hình vẽ



Xét các mệnh đề sau:

- (1) Hàm số nghịch biến trên $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- (2) Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = 1$, tiệm cận ngang là $y = 3$.
- (3) Hàm số đã cho không có cực trị.
- (4) Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(3;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Chọn các mệnh đề **đúng** ?

- A. (1),(3),(4). B. (3),(4). C. (2),(3),(4). D. (1),(4).

Lời giải

Chọn B

Sai lầm thường gặp:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Đạo hàm $y' = \frac{-2}{(x-3)^2}, 0, \forall x \in D \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, hoặc làm số nghịch biến

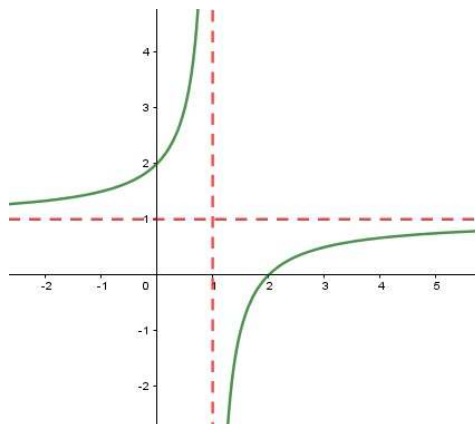
trên $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

Tiệm cận đứng: $x = 3$; tiệm cận ngang: $y = 1$. Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(3;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Từ đó nhiều học sinh kết luận các mệnh đề (1),(3),(4) đúng và chọn ngay A.

Tuy nhiên đây là phương án **sai**.

Câu 7. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, có đồ thị như hình vẽ



Xét các mệnh đề sau:

1. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
2. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định.
4. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Số mệnh đề đúng là:

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Lời giải

Chọn C.

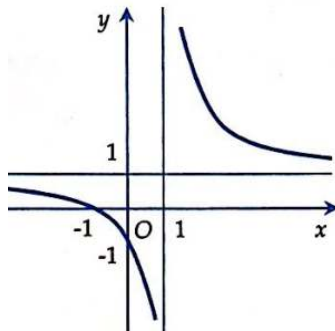
Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Đạo hàm $y' = \frac{1}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1$.

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Chỉ có mệnh đề 3 đúng.

Câu 8. [TH] Đồ thị hình dưới đây là của hàm số nào?



- A. $y = \frac{x-1}{x+1}$ B. $y = \frac{x+1}{x-1}$ C. $y = \frac{2x+1}{2x-2}$ D. $y = \frac{-x}{1-x}$

Lời giải

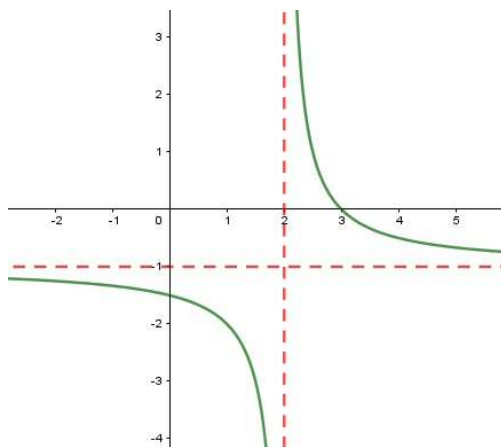
Chọn B.

Ta có: $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$, hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định.

Từ đồ thị ta có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=1$

Đồ thị cắt Ox tại $(-1; 0)$ và cắt Oy tại $(0; -1)$ nên chọn B.

Câu 9. [TH] Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{-x+3}{x-2}$.

B. $y = \frac{3-x}{x+2}$.

C. $y = \frac{-x-3}{x-2}$.

D. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

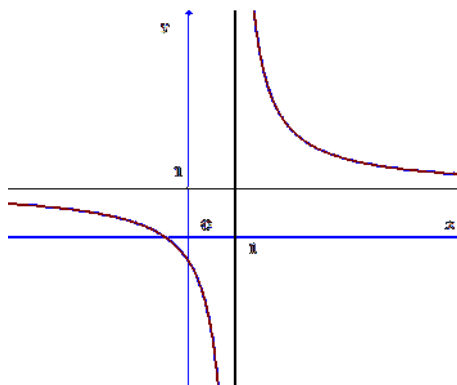
Lời giải

Chọn A.Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x=3 \Rightarrow$

Loại đáp án C, D.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=2 \Rightarrow$ Loại đáp án B.

Vậy đáp án đúng là A.

Câu 10. [TH] Cho đồ thị có hình vẽ như hình dưới đây.

Biết đồ thị trên là đồ thị của một trong 4 hàm số ở các phương án A, B, C, D dưới đây. Chọn phương án trả lời đúng?

A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{x-3}{x-1}$.

C. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Lời giải:

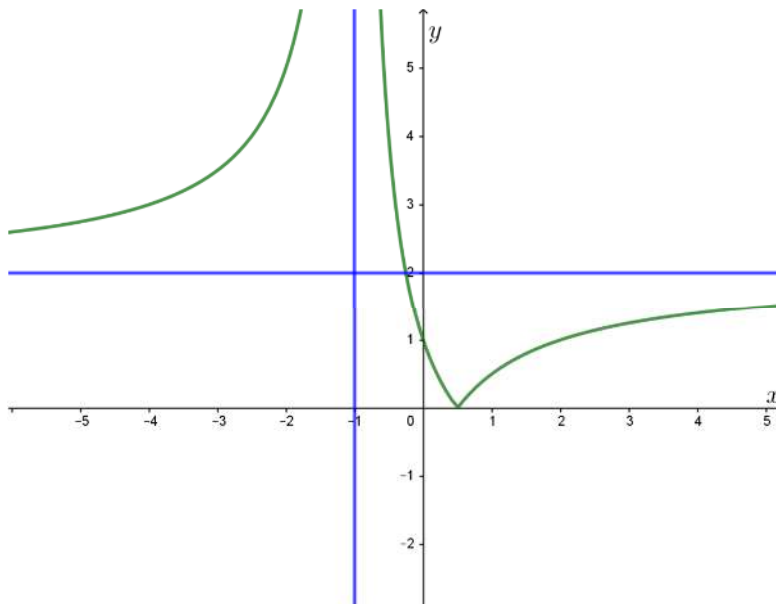
Chọn DĐồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=1$, chỉ có phương án B, D thỏa mãn điều này nên loại A, C.Phương án B có $y' = \frac{2}{(x-1)^2} > 0$ hàm số đồng biến, mà nhìn đồ thị ta thấy hàm số nghịch biến

nên

phương án này loại.

Phương án D có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$ hàm số nghịch biến thỏa mãn đồ thị đã cho.

Câu 11. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



A. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

B. Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

C. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -2$.

D. Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = -2$.

Lời giải

Chọn B

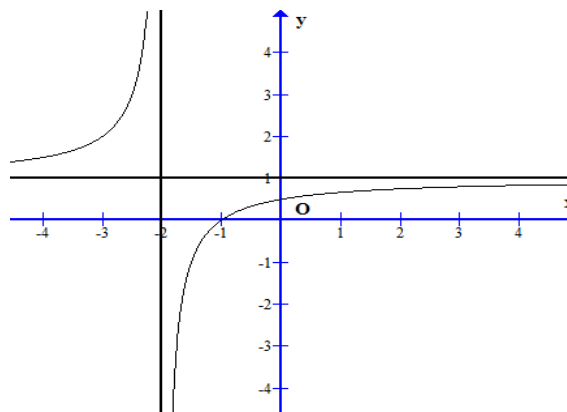
Dựa vào đồ thị ta có

$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$ nên đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị

hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 12. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



A. Tiệm cận đứng $x = -2$, tiệm cận ngang $y = 1$.

B. Tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = -1$.

C. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận ngang $y = -2$.

D. Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.

Lời giải

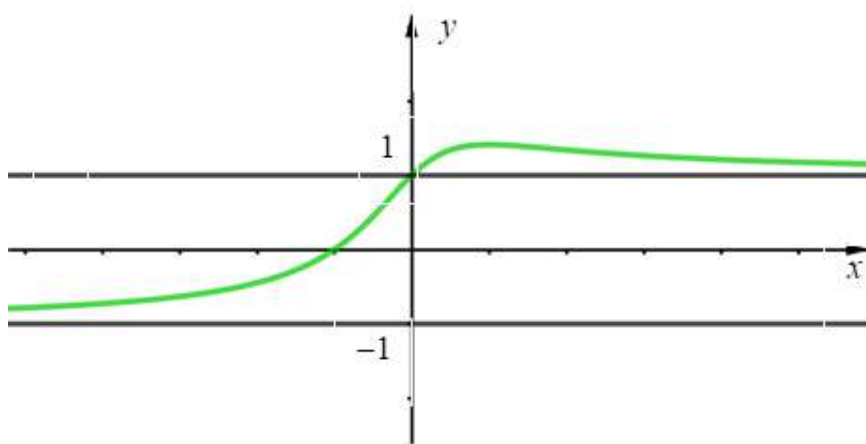
Chọn A

Dựa vào đồ thị ta có

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 13. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

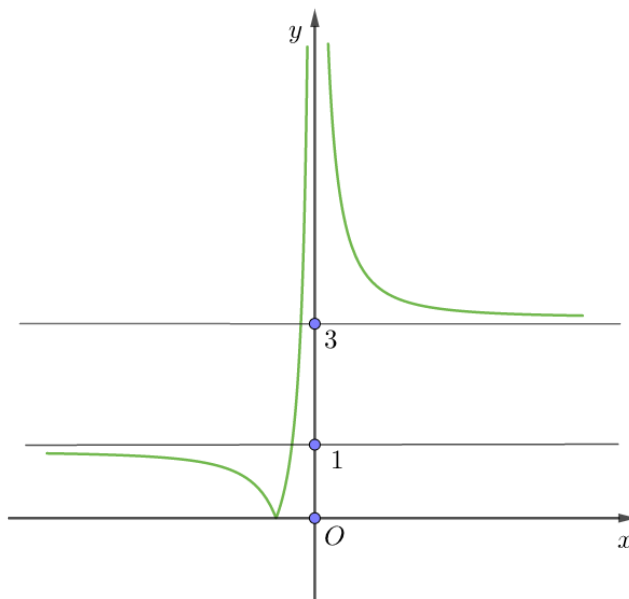
Chọn B

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

Tương tự $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ nên đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 đường tiệm cận ngang.

Câu 14. [TH] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

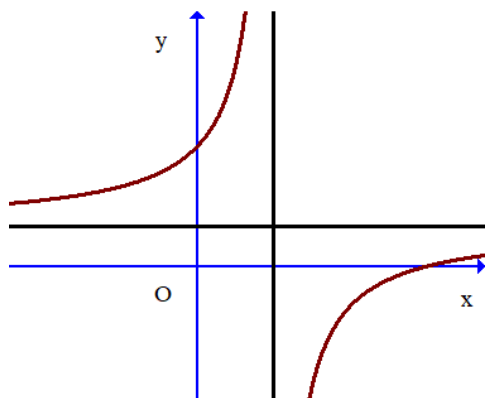
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ nên đường thẳng $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ nên đường thẳng $y = 3$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 15. [VD] Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}, (c \neq 0, ad-bc \neq 0)$ như hình dưới. Chọn khẳng định đúng:



A. $a < 0, b > 0, c - ab > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c - ab > 0$.

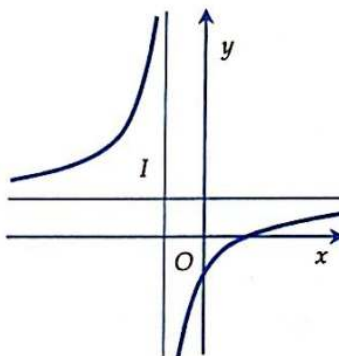
D. $a < 0, b < 0, c - ab > 0$.

Lời giải

Chọn C

Dùng đường tiệm cận và hàm số đồng biến.

Câu 16. [VD] Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ.



Khi đó mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $cd < 0; bd > 0$

B. $ac < 0; bd < 0$

C. $ac > 0; ab < 0$

D. $ad < 0; bc > 0$

Lời giải

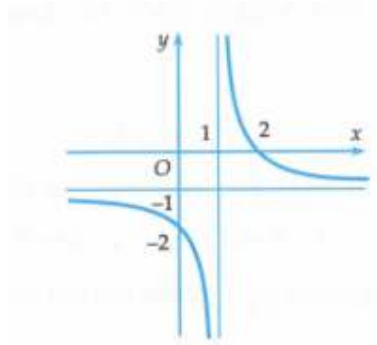
Chọn C

+ Đồ thị có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0 \Rightarrow$ loại B

+ Đồ thị có tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow dc > 0 \Rightarrow$ loại A

+ Đồ thị giao Ox tại điểm có hoành độ $-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0 \Rightarrow C$ đúng

Câu 17. [VD] Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình dưới



A. $b < 0 < a$

B. $0 < b < a$

C. $b < a < 0$

D. $0 < a < b$

Lời giải

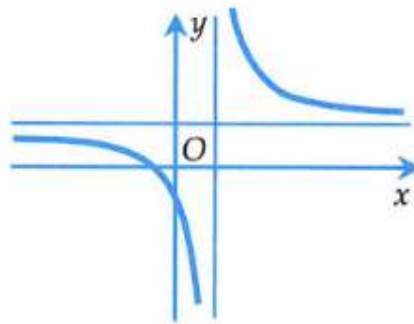
Chọn C

Dựa vào hình vẽ ta thấy: Đồ thị có đường tiệm cận ngang là $y = -1$ và đường tiệm cận đứng là $x = 1$. Và đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 2 > 1$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = -1 \\ \frac{b}{a} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b < -1 \end{cases} \Leftrightarrow b < a = -1 < 0$$

Câu 18. [VD] Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-2)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây

đúng?



A. $a > 1, b > 0, c < 2$. B. $a > 1, b < 0, c > 2$. C. $a < 1, b > 0, c < 2$. D. $a > 1, b > 0, c > 2$.

Lời giải

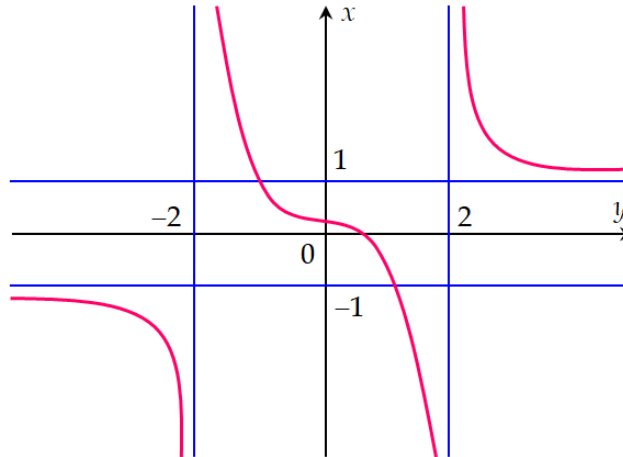
Chọn D

Từ đồ thị, ta có $\frac{b}{d} = y(0) < 0$ và $d < 0$. Suy ra $b > 0$.

Lại có $y = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a-1} < 0$. Suy ra $a > 1$.

Mà đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{a-1}{c-2} > 0$, nên $c > 2$.

Câu 19. [VD] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2}{3f(x)-2}$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{2}{3 \cdot (-1) - 2} = -\frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2}{3 \cdot 1 - 2} = 2$$

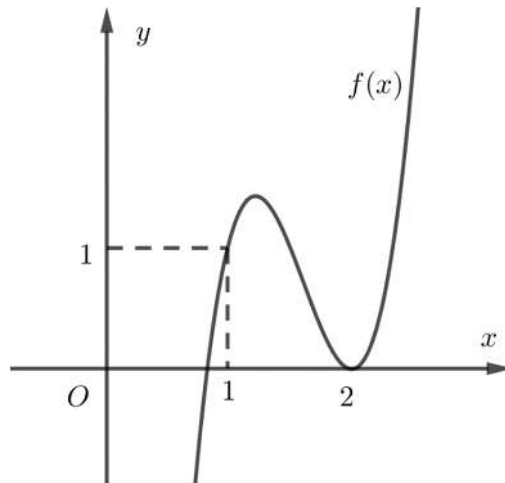
Suy ra đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận ngang.

$$\text{Xét phương trình } 3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: phương trình $f(x) = \frac{2}{3}$ có duy nhất một nghiệm.

Vậy hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 20. [VDC] Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $x[f^2(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$

+) Từ điều kiện $x \geq 1 \Rightarrow x = 0$ không là tiệm cận đứng.

+) Từ đồ thị $\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a(a < 1) \\ x = 2 \end{cases}$

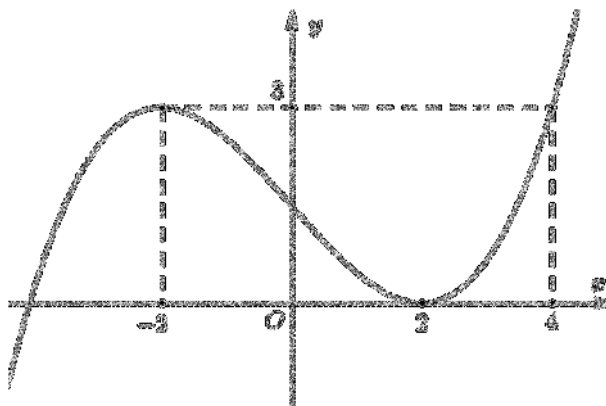
- $x = a$ không là tiệm cận đứng.
- $x = 2$ là nghiệm kép và tử số có một nghiệm $x = 2 \Rightarrow x = 2$ là một đường tiệm cận đứng.

+) Từ đồ thị $\Rightarrow$ phương trình $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = b(1 < b < 2) \\ x = c(c > 2) \end{cases}$

- $x = 1$ không là tiệm cận đứng (vì tử số có một nghiệm nghiệm $x = 1$)
- $x = b, x = c$ là hai đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 21. [VDC] Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(4-x^2)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

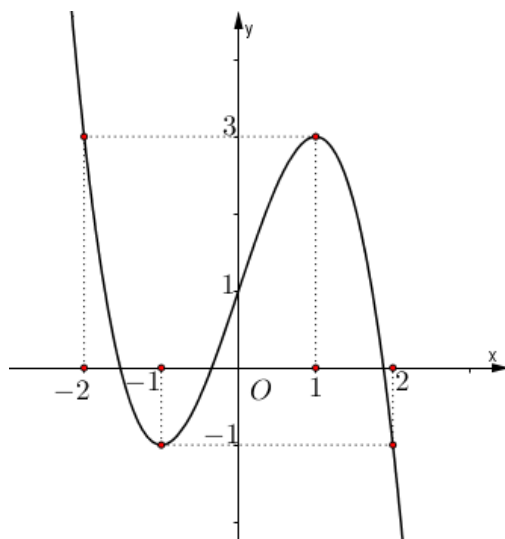
Từ đồ thị ta có $f(4-x^2)-3=0 \Leftrightarrow f(4-x^2)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x^2=-2 \\ 4-x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{6} \\ x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Lại có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(4-x^2) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0 \Rightarrow y=0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn đường tiệm cận.

Câu 22. [VDC] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)[f^2(x)-f(x)]}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ f^2(x) - f(x) \neq 0 \end{cases} \quad (1)$.

$$\begin{aligned} \text{Xét } (x+1)[f^2(x)-f(x)] &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f^2(x)-f(x) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow f^2(x)-f(x) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

* Với $f(x) = 0$:

Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_3 < x_2 < 0 < x_1$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm $x = x_1$.

* Với $f(x) = 1$:

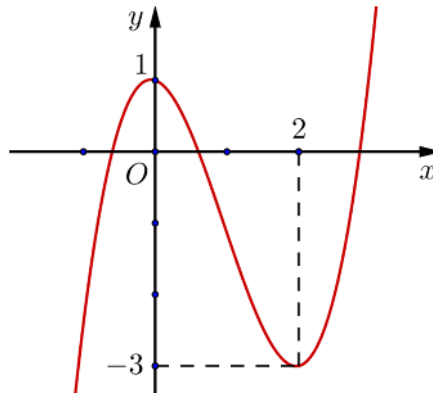
Từ đồ thị hàm số ta thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt $x_6 < x_5 = 0 < x_4$.

Từ điều kiện (1) thì phương trình $f(x) = 1$ có 2 nghiệm $x = x_5$ và $x = x_4$ và cả 2 nghiệm này đều khác x_1 .

Suy ra phương trình $(x+1)[f^2(x)-f(x)] = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)[f^2(x)-f(x)]}$ có 3 tiệm cận đứng.

Câu 23. [VDC] Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2-2x)\sqrt{1-x}}{(x-3)[f^2(x)+3f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3

Lời giải

Chọn D

Điều kiện hàm số có nghĩa $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ (x-3)[f^2(x)+3f(x)] \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \quad (*) \\ (x-3)[f^2(x)+3f(x)] \neq 0 \end{cases}$

Xét phương trình $(x-3)[f^2(x)+3f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = -3 \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra $f(x) = 0$ có 3 nghiệm $-1 < x_1 < x_2 < 1 < x_3$

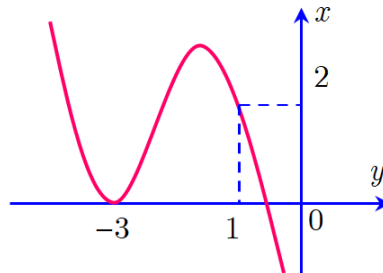
$f(x) = -3$ có hai nghiệm $x_4 < 1$ và $x_5 = 2$

Kết hợp với điều kiện (*) phương trình $(x-3)[f^2(x)+3f(x)] = 0$ có nghiệm x_1, x_2, x_5 .

Và x_1, x_2, x_3 không là nghiệm của tử nên hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 24. [VDC] Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình bên.

Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[(f(x))^2 - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận



A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 + x \geq 0 \\ [f(x)]^2 - 2f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq -1 \\ f(x) \neq 0 \\ f(x) \neq 2 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x = -3$ (bội 2), và

nghiệm $x = x_0$; $x_0 \in (-1; 0)$ nên: $f(x) = a(x+3)^2(x-x_0)$

Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x = -1$; $x = x_1$;

$x_1 \in (-3; -1)$; $x = x_2$; $(x_2 < -3)$. Nên $f(x) - 2 = a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } g(x) &= \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[(f(x))^2 - 2f(x)]} = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x \cdot f(x)[f(x) - 2]} \\ &= \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x^2 + x}}{x \cdot a(x+3)^2 \cdot (x-x_0) \cdot a(x+1)(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{a^2 x(x+3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}. \end{aligned}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{a^2 \sqrt{x}(x+3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)} = +\infty$ nên $x = 0$ là một đường

tiệm cận đứng của đồ thị $y = g(x)$

+) Các đường thẳng $x = -3$; $x = x_1$; $x = x_2$ đều là các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = g(x)$

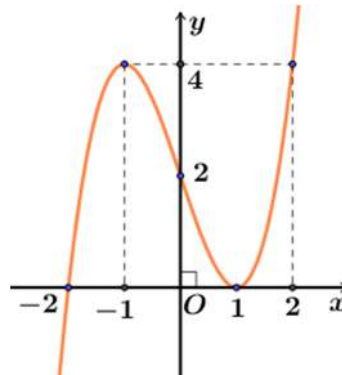
Do đó đồ thị $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

+) Hàm số $y = g(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn và bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu nên đồ thị $y = f(x)$ có một đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 đường tiệm cận.

Câu 25. [VDC] Cho hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ. Tìm số

đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{(x-1)(f^2(x) - 2f(x))}$.



A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Dựa vào đồ thị của $y = f(x)$, ta có

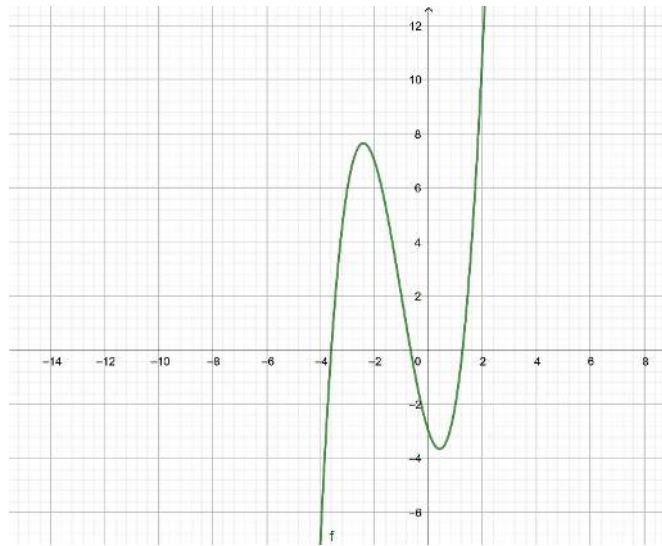
$$\begin{cases} f(-1) = 4 \\ f(0) = 2 \\ f(1) = 0 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c + d = 4 \\ d = 2 \\ a + b + c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -3 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

$$\begin{aligned} \text{Xét hàm số } y &= \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{(x-1)(f^2(x) - 2f(x))} = \frac{(x^2-1)(x^2-3)}{(x-1) \cdot f(x) \cdot (f(x)-2)} \\ &= \frac{(x^2-1)(x^2-3)}{(x-1) \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot x \cdot (x^2-3)} = \frac{(x+1)}{(x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot x} \end{aligned}$$

Hàm số có các đường tiệm cận đứng là $x=0$; $x=1$; $x=-2$ và đường tiệm cận ngang $y=0$.

Câu 26. [VDC] Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số: $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{f(x)+2}$

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải**Chọn C**

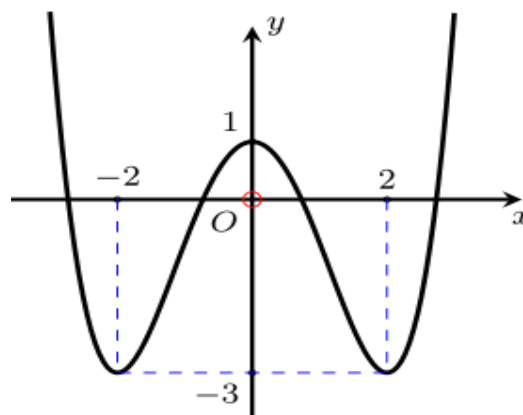
Từ đồ thị ta có: $f(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a & (a < -2) \\ x = b & (-2 < b < 0) \\ x = c & (c > 0) \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện có nghĩa của $\sqrt{x}$ suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 tiệm cận đứng $x = c (c > 0)$.

Hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{f(x)+2}$ có bậc của tử bé hơn bậc của mẫu (Hàm số có bậc tử là $\frac{1}{2}$ còn bậc mẫu là 3) suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{f(x)+2}$ có hai đường tiệm cận.

Câu 27. [VDC] Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

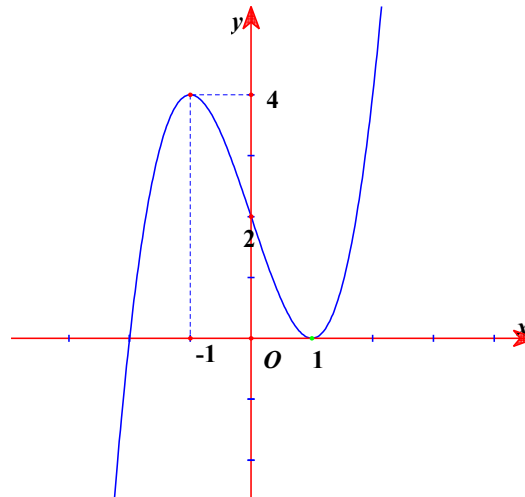
Chọn A

Xét phương trình $f^2(x) + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = x_1 < -2; x = x_2 > 2 \\ x = -2; x = 2 \end{cases}$

Trong đó nghiệm $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$ đều có bội 2 và $x = x_1 (x_1 < -2)$, $x = x_2 (x_2 > 2)$ là nghiệm đơn (bội 1).

So sánh bội nghiệm ở mẫu và bội nghiệm ở tử thì thấy đồ thị có các TCD là $x = 0$; $x = 2$; $x = x_1$; $x = x_2$

Câu 28. **[VDC]** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x) - 2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

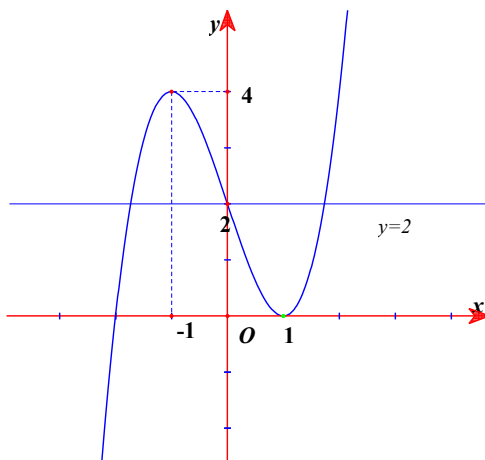
D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta xét mẫu số: $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy:



+) Phương trình (1) có nghiệm $x_1 = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x_2 = 1$ (nghiệm kép)

$$\Rightarrow f(x) = (x-a)(x-1)^2.$$

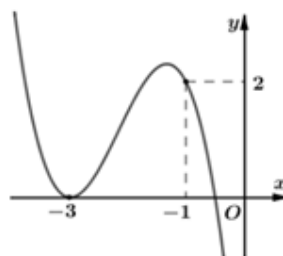
+) Phương trình (2) có nghiệm $x_3 = b \in (a; -1)$, $x_4 = 0$ và $x_5 = c > 1$

$$\Rightarrow f(x) - 2 = (x-b)x(x-c).$$

$$\text{Do đó } g(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{f(x)[f(x)-2]} = \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-a)(x-1)^2 \cdot (x-b)x(x-c)} = \frac{x+1}{(x-a)(x-b)x(x-c)}.$$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 29. [VDC] Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đồ thị hàm $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2.

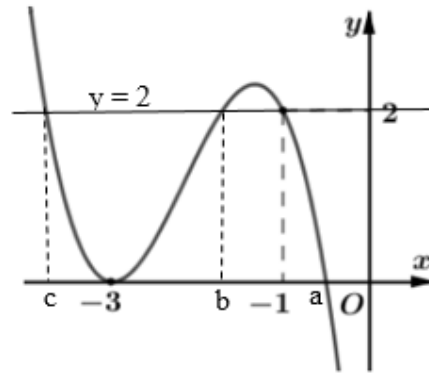
B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn C



Ta thấy phương trình bậc ba $f(x)=2$ có 3 nghiệm phân biệt là $x_1=c<-3$, $x_2=b$ với $-3<b<-1$ và $x_3=-1$.

Và phương trình bậc ba $f(x)=0$ có nghiệm kép $x=-3$ và nghiệm đơn $x=a$ với $-1<a<0$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -(x+3)^2(x-a)=0 \text{ và } f(x)=2 \Leftrightarrow -(x-c)(x-b)(x+1)=0.$$

$$\text{Ta có: } y = \frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x[f^2(x)-2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{x \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]}.$$

$$\text{Khi đó: } \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+1}}{\sqrt{x} \cdot f(x) \cdot [f(x)-2]} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} y = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+1)\sqrt{x(x+1)}}{-x(x+3)(x-a) \cdot [f(x)-2]} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} y = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x \cdot f(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty.$$

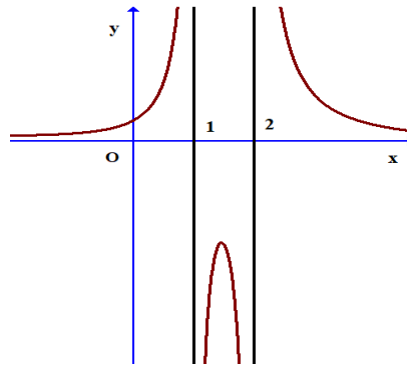
$$\lim_{x \rightarrow b^+} y = \lim_{x \rightarrow b^+} \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x \cdot f(x)(x-c)(x-b)(x+1)} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+3)\sqrt{x(x+1)}}{-x \cdot f(x)(x-c)(x-b)} = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} y$ không tồn tại.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x[f^2(x)-2f(x)]}$ có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0$; $x=-3$; $x=c$; $x=b$.

Câu 30. [VDC] Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+3nx+2m^2}$ có đồ thị có hình vẽ như hình dưới đây.



Hỏi có bao nhiêu cặp số $(m; n)$ thỏa mãn bài toán.

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3

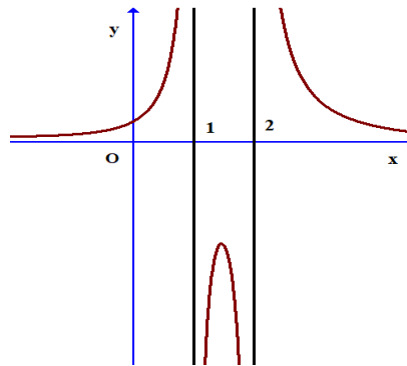
Lời giải:

Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta có hai tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=2$, khi đó $x=1$ và $x=2$ là nghiệm bậc nhất của mẫu nhưng không là nghiệm của tử điều kiện:

$$\begin{cases} 1+3n+2m^2=0 \\ 4+6n+2m^2=0 \\ m+1 \neq 0 \\ m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-1 \\ m=\pm 1 \\ m \neq -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=-1 \end{cases}. \text{ Vậy có duy nhất một cặp } (m; n) \text{ thỏa mãn bài toán.}$$

Câu 31. [VDC] Cho hàm số $y = \frac{nx+1}{x^2+3mx+2n^2}$ có đồ thị có hình vẽ như hình dưới đây.



Khi đó tính biểu thức $P = mn + m^2 + n^2$?

A. $P=3$.

B. $P=1$.

C. $P=1$ hoặc $P=3$. D. $P=2$

Lời giải:

Chọn B

Từ đồ thị hàm số ta có hai tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=2$, khi đó $x=1$ và $x=2$ là nghiệm bậc nhất của mẫu nhưng không là nghiệm của tử điều kiện:

$$\begin{cases} 1+3m+2n^2=0 \\ 4+6m+2n^2=0 \\ n+1 \neq 0 \\ 2n+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+2n^2=-1 \\ 6m+2n^2=-4 \\ n+1 \neq 0 \\ 2n+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=\pm 1 \\ n \neq -1 \\ 2n+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=1 \end{cases}.$$

Tính $P = mn + m^2 + n^2 = 1$.

*) *Lưu ý:* Học sinh thường sai lầm là chỉ cho $x = 1$ và $x = 2$ là nghiệm của mẫu nhưng không chú ý điều kiện tử khác 0 nên giải được $\begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} m = -1 \\ n = -1 \end{cases}$ từ đó tính được $P = 1$ hoặc $P = 3$ sau đó chọn.